Devoir Maison 4

Pour le 1 décembre 2025

Problème

(*Banque PT Maths A 2009*)

Dans tout le problème, n est un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, Id_E l'identité de E et $0_{\mathscr{L}(E)}$ l'endomorphisme nul sur E.

Partie I

1. Dans cette question, E est de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f

2. Dans cette question, E est de dimension 3. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

   Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à D.

3. L'espace vectoriel E est désormais muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdots \rangle$.

   La norme du vecteur $x \in E$ est notée $\|x\|$.

   Enfin, le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E sera noté $F^\perp$.

   On rappelle qu'un projecteur de E est dit orthogonal lorsque son noyau et son image sont orthogonaux. Soit p un projecteur de E.

   (a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal alors :

$$\forall u \in E, ; \qquad \|p(u)\| \leqslant \|u\| \qquad\qquad (\star).$$

   (b) Montrer que si $(\star)$ est vérifiée, alors p est un projecteur orthogonal.

Partie II

On considère ici l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients de la diagonale de A et $A^\top$ la matrice transposée de A.

On définit l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\top B).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \leqslant n \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

3. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. On note Φ la norme associée au produit scalaire φ (i.e. $\Phi(M) = \sqrt{\varphi(M, M)}$)

   Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Exprimer $\Phi(MU)$ en fonction de $\Phi(M)$.
5. On considère dans cette question **uniquement** que $n = 2$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

(a) Donner une base de $F^{\perp}$.

(b) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, par la projection orthogonale sur F.

Partie III

On considère l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2, \quad \psi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i)$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
   (a) Calculer $\psi(1,1)$, $\psi(1,X)$, $\psi(1,X^2)$, $\psi(X,X)$, $\psi(X,X^2)$ et $\psi(X^2,X^2)$.
   (b) On note $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ la base orthonormale de F telle que :
   $$\forall k \in \{0,1,2\} \quad \mathrm{Vect}(P_0, .., P_k) = \mathrm{Vect}(1, .., X^k) \quad \text{et} \quad \psi(P_k, X^k) > 0.$$
   Déterminer explicitement les polynômes P_0, P_1 et P_2.
3. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$.
   On considère l'ensemble des sommes $\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{3} (x_i - P(i))^2, P \in F \right\}$.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme R et un seul, de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :
   $$\forall i \in \{0,1,2,3\}, \quad R(i) = x_i$$
   (b) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme R sur le sous-espace vectoriel F.
   (c) Montrer alors que l'ensemble Σ possède un minimum atteint pour un polynôme $S \in F$ et un seul. Déterminer ce minimum.